Año III 15 de Mayo de 1903 Núm. 5

ANALES

DEL

INSTITUTO DE INJENIEROS DE CHILE

DE LA PARÁBOLA

Teorema propuesto en la clase de Jeometría analítica de la Universidad el año 1901 i demostrado ese mismo año: Si se dividen los lados AB i AC de un triángulo isósceles; a partir del vértice A, en $2\,n$ partes iguales i se unen el primer punto de division de cada uno de los lados con el penúltimo del otro lado, el segundo punto con el antepenúltimo etc., estas rectas son tanjentes a una parábola inscrita en el triángulo i que pasa por los vértices B i C.

Demostracion 1.ª (Fig. 1) Sea $A\,B=A\,C=a$ i el ángulo $B\,A\,C=\theta$. Si el teorema es exacto, la bisectriz $A\,D$ de θ debe ser el eje de la parábola i $D\,E$ la subnormal correspondiente a B. Siendo ahora la subnormal de una parábola igual al semiparámetro (p), se puede determinar, de antemano, el valor de p. En efecto, será

$$(1) \qquad p=\frac{D\,B^2}{A\,D}=\frac{a^2\,\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{a\cos\frac{\theta}{2}}=a\,tj\,\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,.$$

Por razones de simetría resulta todavía que la cúspide de la parábola debe encontrarse en el punto O de encuentro de la mediana con la bisectriz de θ.

Establecemos, en seguida, un sistema oblícuo de ejes coordenados, formados por los lados del ángulo θ i hacemos $a=2\,n\,a'$. La ecuacion de la recta que une el punto de division (q) sobre $A\,X$ con el punto de division $(2\,n-q)$ sobre $A\,Y$, es

$$\frac{x}{q\,a'}+\frac{y}{(2\,n-q)\,a'}=1$$

$$(2) \qquad \text{o sea} \qquad (2\,n-q)\,x+q\,y=q\,(2\,n-q)\,a'.$$

Si pasamos, ahora, de este sistema oblícuo a otro rectangular de las $(\xi,\ \eta)$ del orijen O i cuyo eje de las ξ coincide con la bisectriz de θ, notamos que las coordenadas de O en el sistema primitivo son

$$x_0=y_0=\frac{a}{4}=\frac{n\,a'}{2}$$

de modo que las sustituciones correspondientes a la trasformacion de coordenadas son

$$x = \frac{n\,a'}{2} + \xi\,\frac{\operatorname{sen}(\theta-a)}{\operatorname{sen}\theta} + \eta\,\frac{\operatorname{sen}(\theta-\beta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$y = \frac{n\,a'}{2} + \xi\,\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\theta} + \eta\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta},$$

sustituciones en las cuales a i β significan los ángulos que los ejes de las ξ i de las η forman con el eje de las x.

Siendo ahora

$$a = \frac{\theta}{2} \text{ i } \beta = 90^{o} + \frac{\theta}{2}$$

resulta

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{n\,a'}{2} + \dfrac{\xi}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} - \dfrac{\eta}{2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}} \\[2ex] y = \dfrac{n\,a'}{2} + \dfrac{\xi}{2\cos\dfrac{\theta}{2}} + \dfrac{\eta}{2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}} \end{cases}$$

Introduciendo (3) en (2), resulta, despues de algunas trasformaciones,

$$(4)\quad \frac{n\,\xi}{\cos\dfrac{\theta}{2}} - \frac{(n-q)\,\eta}{\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}} = -a'\,(n-q)^{2}$$

como ecuacion de la recta que une los puntos (q) sobre $A\ C$ i $(2\,n-q)$ sobre $A\ B$ entre sí.

Si podemos ahora demostrar que la recta (4) es tanjente a la parábola cuyo parámetro hemos fijado de antemano, hemos demostrado el teorema, en atencion a los valores de q que varian entre o i n.

Para este fin, comparamos la recta (4) con una tanjente a la parábola $\eta^{2} = 2\,p\,\xi$ en el punto (ξ', η'), o sea que damos a la ecuacion (4) la forma de la ecuacion de la tanjente

$$(5)\quad \eta\,\eta' = p\,(\xi + \xi'),$$

a saber

$$(6)\quad (n-q)\,\eta = n\ tj\ \frac{\theta}{2}\left(\xi + \frac{a'\,(n-q)^{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{n}\right)$$

Para comparar (6) con (5) será preciso multiplicar los dos miembros de (6) por un factor indeterminado λ.

Obtenemos:

$$\eta^2 = \lambda\,(n-q),\ p = \lambda\, n\, tj\,\frac{\theta}{2},\ \xi' = \frac{a'\,(n-q)^2\,\cos\frac{\theta}{2}}{n}$$

La consideracion del punto (ξ', η') como punto de la parábola

$$\eta^2 = 2\,p\,\xi \tag{7}$$

nos permite determinar el valor de λ.

Resulta

$$\lambda = 2\,a'\,tj\,\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\,a'\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

luego

$$p = a\,tj\,\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

que es, en verdad, el mismo valor de p encontrado en (1).

Por lo tanto, las rectas de que se trata son todas tanjentes a la parábola (7) i los puntos de tanjencia tienen las coordenadas

$$\frac{\xi' = a\,(n-q)^2\,\cos\frac{\theta}{2}}{2\,n^2},\ \eta' = \frac{a\,(n-q)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{n}$$

siendo q un número entero que cumple con $o \leqq q \leqq n$.

Demostracion 2ª (Fig. 2). En vista de que tres rectas cualesquiera que se cortan en 3 puntos pueden considerarse como tanjentes a infinitas parábolas de eje comun, trazamos tres rectas consecutivas, de $(q-1)$ a $(2n-q+1)$, de (q) a $(2n-q)$ i de $(q+1)$ a $(2n-q-1)$ que se cortan en los puntos H, G, F. La paralela trazada por F a $A\ D$ corta la $G\,H$ en el punto de tanjencia M que es el punto medio de $H\,G$. Nos proponemos, por eso, determinar el lugar jeométrico del punto M en caso de que q varia.

Consideremos, primero, dos rectas cualesquiera que corresponden a q i a s; las ecuaciones de tales rectas son en virtud de (2),

$$\begin{aligned}(2n-q)\,x + q\,y &= q\,(2n-q)\,a'\\ (2n-s)\,x + s\,y &= s\,(2n-s)\,a'\end{aligned}$$

Determinemos, en seguida, su punto de encuentro i hacemos sucesivamamente

$$s = q-1 \text{ i } s = q+1.$$

Despues de algunas trasformaciones resulta

$$x=\frac{q\,s\,a'}{2n},\quad y=\frac{(2n-q)\,(2n-s)\,a'}{2n};$$

$s=q-1$ nos da el punto H, de suerte que

$$x_H=\frac{q\,(q-1)\,a'}{2n},\quad y_H=\frac{(2n-q)\,(2n-q+1)\,a'}{2n},$$

$s=q+1$ nos da el punto G; de aquí que

$$x_G=\frac{q\,(q+1)\,a'}{2n},\quad y_G=\frac{(2n-q)\,(2n-q-1)\,a'}{2n}$$

Si designamos las coordenadas del punto medio M de HG por (x, y), resulta

$$x=\frac{x_G+x_H}{2}=\frac{a'\,q^2}{2n},\quad y=\frac{y_G+y_H}{2}=\frac{a'\,(2n-q)^2}{2n}.$$

Eliminando, en fin, a q, obtenemos la ecuacion del lugar jeométrico del punto M con respecto al sistema oblícuo formado por los lados del ángulo θ.

A saber

$$q^2=\frac{2n\,x}{a'}\quad \text{i}\quad q^2-4\,n\,q+4\,n^2=\frac{2\,n\,y}{a'}$$

da

$$q=\frac{x-y+2\,n\,a'}{2\,a'}$$

luego

$$\left(\frac{x-y+2\,n\,a'}{2\,a'}\right)^2=\frac{2\,n\,x}{a'}$$

o bien

$$(x-y+a)^2=4\,a\,x \tag{8}$$

que es la ecuacion de una parábola.

Trasformemos todavia (8) por medio de (3), i resulta, despues de algunas trasformaciones,

$$\eta^2=2\,a\,tj\,\frac{\theta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\cdot\,\xi$$

De aquí que el semiparámetro de la parábola resultante es

$$p = a\ tj\ \frac{\theta}{2}\ \text{sen}\ \frac{\theta}{2}$$

como mas arriba.

Demostracion. 3.ª (Fig. 1). Sean A_1, A_2 etc. los puntos de division del lado $A\,B$ i P_1, P_2 etc. los puntos de tanjencia correspondientes a las rectas que parten de A_1, A_2 etc. Si estas rectas $A_1\ P_1$, $A_2\ P_2$, etc. son tanjentes a una parábola inscrita en el Δ $A\ B\ C$ i que pasa por B i C, hemos visto que la ecuacion de la curva con respecto al sistema rectangular de las ξ, η, debe ser

$$(9)\ \text{i}\quad \begin{cases} \eta^2 = 2\,p\,\xi \\ p = a\ tj\ \dfrac{\theta}{2}\ \text{sen}\ \dfrac{\theta}{2}. \end{cases}$$

Nos proponemos, por eso, demostrar que las coordenadas de los puntos P_1 P_2 etc. satisfacen a las ecuaciones (9), calculando estas coordenadas en atencion a un teorema conocido que relaciona las coordenadas del punto de encuentro de dos tanjentes a una parábola con las coordenadas respectivas de los puntos de la tanjencia. En virtud de este teorema, tenemos

$$(10)\qquad \xi_{A_q} = \sqrt{\xi_B \cdot \xi_{P_q}}, \quad \eta_{Aq} = \frac{\eta_B + \eta_{P\,q}}{2}$$

Ahora bien, se tiene

$$\xi_A = -n\ a'\ \cos\frac{\theta}{2}\ ;\ \xi^{A_1} = -(n-1)\ a'\ \cos\frac{\theta}{2};\ \text{etc.}$$

$$(11)\qquad \xi_{Aq} = -(n-q)\ a'\ \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\eta_A = 0;\ \eta_{A_1} = a'\ \text{sen}\frac{\theta}{2}\ ;\ \text{etc.}$$

$$(12)\qquad \eta_{Aq} = q\ a'\ \text{sen}\frac{\theta}{2}.$$

Introduciendo (11) i (12) en (10), resulta

$$-(n-q)\ a'\ \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{n\ a'\ \cos\frac{\theta}{2}\cdot\ \xi_{Pq}}$$

$$q\ a'\ \text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{2\ n\ a'\ \text{sen}\ \dfrac{\theta}{2} + \eta_{Pq}}{2}$$

o sea

$$(13)\left\{\begin{array}{l}\xi_{Pq}=\dfrac{(n-q)^2\,a'\cos\dfrac{\theta}{2}}{n}=\dfrac{a\,(n-q)^2\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\,n^2}\\[2ex]\eta_{Pq}=-2\,(n-q)\,a'\,\mathrm{sen}\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{a\,(n-q)\,\mathrm{sen}\dfrac{\theta}{2}}{n}\end{array}\right.$$

i fácilmente se verifica que

$$\eta_{Pq}{}^2=2\,p\,\xi_{Pq}\ \text{i}\ p=a\,tj\frac{\theta}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}.$$

Por razones de simetría es, ademas, claro que tambien las rectas que parten de los puntos de division de $A\ C$ son tanjentes a la parábola (9) lo que concluye la demostracion.

AUGUSTO TAFELMACHER